Chap2 – Les nombres Réels – cours

PARTIE A : Les différents ensembles de nombres

I) Les entiers Naturels.

Définition : L'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}=\{0,1,2,.....\}$ est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de compter une collection d'objets.

Exemple : Complète en utilisant le bon signe : $\in$ ou $\notin$

$124.....\mathbb{N}; 12,4.....\mathbb{N}; -124.....\mathbb{N}; \frac{1}{3}.....\mathbb{N}; \frac{25}{5}.....\mathbb{N}; \sqrt{2}.....\mathbb{N}; \sqrt{49}.....\mathbb{N}$

II) Les Entiers Relatifs.

Définition : L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}=\{.....-4,-3,-2,-1,0,1,2,.....\}$, est l'ensemble des nombres entiers naturels et de leurs opposés.

Remarque : En particulier tous les entiers naturels sont dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$

Exemple : Complète en utilisant le bon signe $\in$ ou $\notin$

$124.....\mathbb{Z}; 12,4.....\mathbb{Z}; -124.....\mathbb{Z}; \frac{1}{3}.....\mathbb{Z}; \frac{25}{5}.....\mathbb{Z}; \sqrt{2}.....\mathbb{Z}; -\sqrt{49}.....\mathbb{Z}$

III) Les Décimaux

Définition : L'ensemble des décimaux noté ID est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Remarque : On a $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID$

Exemple : Complète en utilisant le bon signe $\in$ ou $\notin$

$-124.....ID; 12,4.....ID; -1,24.....ID; \frac{1}{2}.....ID; \frac{1}{5}.....ID; \frac{1}{3}.....ID$

>> Justification :

IV) Les Rationnels

Définition : L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction, c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (b entier relatif non nul)

Remarque : On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q}$.

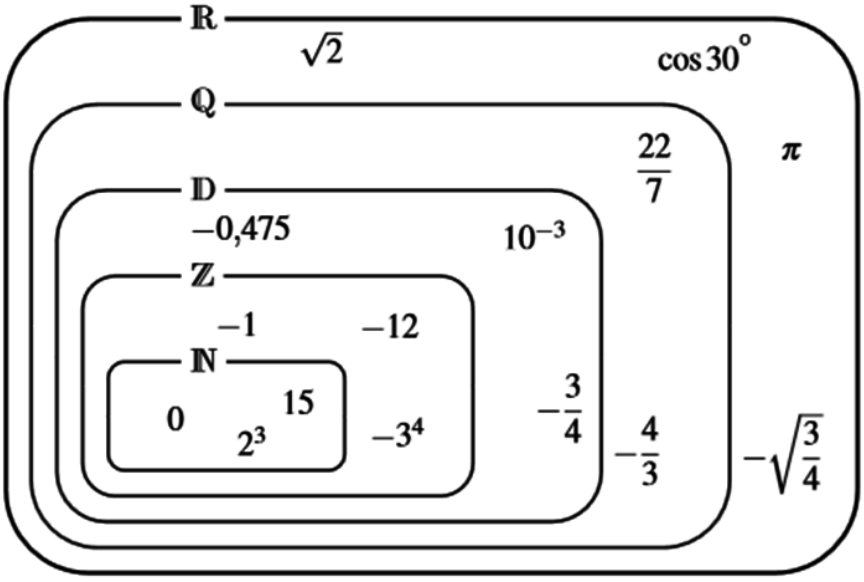
$124 ..... \mathbb{Q}; 12,4 ..... \mathbb{Q}; -124 ..... \mathbb{Q}; \frac{1}{3} ..... \mathbb{Q}; \frac{25}{5} ..... \mathbb{Q}; \sqrt{2} ..... \mathbb{Q}; -\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} ..... \mathbb{Q}$

- On montrera plus tard que :

V) Les nombres Réels

Approche : Depuis l'antiquité et l'école pythagoricienne, on sait qu'il existe des nombres comme $\sqrt{2}$ qui ne sont pas des rationnels mais qui sont bien réels car rattachés à notre espace géométrique ($\sqrt{2}$ étant la longueur de la diagonale du carré de côté 1). Ces nombres sont appelés les irrationnels. L'ensemble des nombres réels sera pour nous l'ensemble de des nombres rationnels complétés par ces irrationnels, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent se représenter par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Comme tous les nombres que nous manipulons sont des nombres réels, à chaque fois qu'on demande la nature d'un nombre, on précise le plus petit ensemble auquel il appartient.

Exemple : Donner la nature des nombres suivants :

$-7; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; -\frac{30}{6}; \sqrt{3}; \sqrt{100}; \frac{1}{\sqrt{49}}; -0,7$

PARTIE B : Les intervalles

Les nombres réels sont représentés sur une droite graduée et orientée appelée droite des nombres réels. On va définir quelques ensembles de nombres réels particuliers, appelés intervalles, que l'on va représenter sur cette droite.

Définition :
Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est l intervalle $[a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l intervalle $]a;b[$

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ est l intervalle $[a;b[$

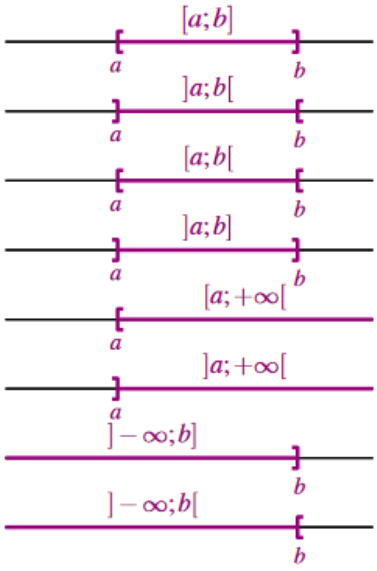
L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est l intervalle $]a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ est l intervalle $[a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est l intervalle $]a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $x \leq b$ est l intervalle $]-\infty;b]$

L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est l intervalle $]-\infty;b[$



Exemple :

Réunion et intersection d'intervalles

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- L'**intersection** des intervalles I et J, noté $I \cap J$ (lire « inter ») est l'ensemble des réels appartenant à l'intervalle I **et** à l'intervalle J.
- La **réunion** des intervalles I et J, noté $I \cup J$ est l'ensemble des réels appartenant à l'intervalle I **ou** à l'intervalle J (voire aux deux).

Exemple :

Chap2 – Les nombres réels - Exercices

Exercice 1

Représenter les intervalles I et J et donner leur intersection et leur réunion.

I	J	schéma	$I \cap J$	$I \cup J$
$[-4\,;3]$	$[1\,;5]$			
$]-\infty\,;2]$	$[-4\,;+\infty[$			
$]-\infty\,;3]$	$]-\infty\,;5[$			
$]-\infty\,;7]$	$[7\,;+\infty[$			
$[-3\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-3[$			

Exercice 2

1. Compléter le tableau suivant :

L'ensemble	des réels vérifiant	se note
I	$-3 \leqslant x \leqslant 7$	
J	$-5 \leqslant x < -2$	
K		$]2\,;13]$
L	$x \leqslant 7$	
M	$1 < x$	

r $I \cap J$, $I \cup J$, $J \cap K$, $K \cup L$, $I \cap L$, $K \cup M$.

Exercice 3

Démontrer que les nombres suivants sont des nombres décimaux

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{1}{5} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{13}{5}$$

Exercice 4

Parmi les nombres rationnels suivants, quels sont ceux qui sont décimaux ? Justifier la réponse.

$$\frac{1}{7} \;,\; \frac{27}{25} \;,\; \frac{91}{7} \;,\; \frac{42}{17}$$

Exercice 5

Relier chacun des nombres ci-dessous au plus petit des ensembles auquel il appartient :

$\frac{-3}{2}$ $\quad$ $\frac{-4}{3}$ $\quad$ $\frac{-6}{-2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{3}$ $\quad$ $\frac{28}{-7}$

$\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{D}$ $\quad$ $\mathbb{Q}$ $\quad$ $\mathbb{R}$

Exercices 6

Pour chacun des nombres ci-dessous, déterminer le plus petite ensemble de nombre auquel il appartient :

a. $\frac{3}{4}$ $\quad$ b. $\frac{5}{3}$ $\quad$ c. $\frac{0,3}{24}$ $\quad$ d. $\frac{5,1}{1,7}$

e. $\sqrt{18}$ $\quad$ f. $\sqrt{121}$ $\quad$ g. $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ $\quad$ h. $\sqrt{1,44}$

Exercice 7

La calculatrice est autorisée pour cet exercice.

Donner un encadrement des nombres suivants :

1. $\frac{1}{3}$ à 10^{-4} près
2. $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près
3. $-\sqrt{7}$ à 10^{-2} près
4. $-\frac{5}{11}$ à 10^{-3} près

Exercice 8

On appelle développement décimal d'un nombre sa décomposition selon les puissances de 10.

On a par exemple : $13,254 = 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$

Déterminer le développement décimal des nombres suivants :

$147,23$ $\quad$ $\frac{15}{8}$ $\quad$ $-0,002\,4$