Chap 2G - Produit scalaire et Orthogonalité dans l'espace

Positions relatives – Complément

Rappel : Pour démontrer qu'une droite (d) est parallèle à un plan (P) on peut montrer qu'un vecteur directeur de (d) est combinaisons linéaires deux vecteurs non colinéaires du plan (P)

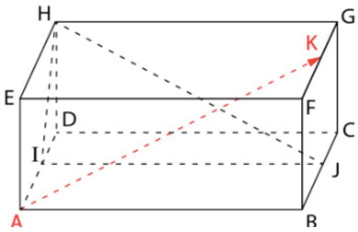
10 Démontrer qu'une droite et un plan sont parallèles

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AD], [BC] et [FG].

a) Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG}$.

b) En déduire l'écriture de $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$.

c) En déduire que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).



12 ABCD est un tétraèdre. G est le point tel que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ où I est le milieu de [BC].

E et F sont tels que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

a) Réaliser une figure.

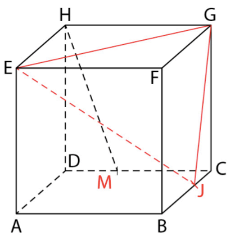
b) Décomposer $\overrightarrow{EF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

c) En déduire que la droite (EF) est parallèle au plan (BCD).

91 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
M et J sont les points définis par :

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{HM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GJ}$.



b) En déduire la position relative de la droite (HM) et du plan (EGJ).

96 d est la droite qui passe par le point A(– 1 ; 2 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}(1;0;3)$.
d' est la droite qui passe par le point B(– 4 ; 5 ; 7) et de vecteur directeur $\vec{v}(-2;6;22)$.
M est le point de coordonnées (– 3 ; 2 ; – 4).

a) Démontrer que le point M appartient à la droite d.

b) Le point M appartient-il à la droite d' ?

c) En déduire la position relative des droites d et d'.

97 On donne le point A(2 ; – 1 ; – 3) et les vecteurs $\vec{u}(2;1;0)$ et $\vec{v}(-1;4;5)$.
$\mathcal{P}$ désigne le plan $(A;\vec{u},\vec{v})$.

1. a) Le point B(– 2 ; 6 ; 7) appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

b) M est le point tel que B soit le milieu de [AM].
Justifier que M appartient au plan $\mathcal{P}$.

2. On donne le point C(12 ; – 8 ; – 11).

a) Ce point appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

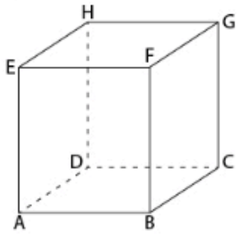
b) Déterminer la position relative de la droite (MC) et du plan $\mathcal{P}$.

Produit scalaire de l'espace

Activité : du plan à l'espace

Pour calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux vecteurs de l'espace, on choisit trois points O, M, N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, puis on calcule $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ dans un plan $\mathcal{P}$ contenant les points O, M, N.

On modélise un Rubik's cube par un cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous.



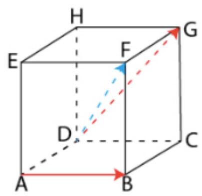
1 **a)** Dans chaque cas, calculer le produit scalaire.

- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$ (utiliser le plan (ADE))
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ (utiliser le plan du rectangle AFGD)

b) En déduire que dans l'espace, on a également $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BG}$.
a) Choisir des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les extrémités appartiennent à un même plan.
b) Calculer alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3 Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DC}$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DC}$?
On dit alors que **les droites (EA) et (DC) sont orthogonales**.

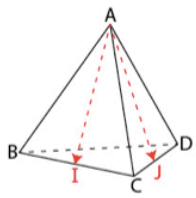


1 Calculer un produit scalaire

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG}$.
b) Utiliser la décomposition $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF}$ pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF}$.

2 Utiliser le produit scalaire pour déterminer un angle

ABCD est un tétraèdre régulier (chaque face est un triangle équilatéral) d'arête 6.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$, puis AI et AJ.
b) Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en utilisant les égalités $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AJ}$.
c) Exprimer ce produit scalaire en fonction de $\cos(\widehat{IAJ})$ et en déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{IAJ}$. *Arrondir au dixième.*



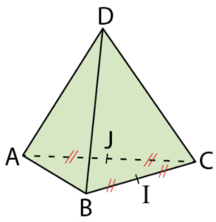
3 On reprend le cube d'arête 1 de l'exercice **1**.
a) Calculer $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CG}$.
b) Utiliser la décomposition $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EH}$ pour calculer $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG}$.

4 On reprend le tétraèdre d'arête 6 de l'exercice **2**.
a) Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI}$.
b) Déterminer $\cos(\widehat{ADI})$ et en déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ADI}$. *Arrondir au dixième.*

28 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 2. I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AC].
Calculer chaque produit scalaire.

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ}$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}$ **d)** $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DC}$



30 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace tels que :

$$||\vec{u}|| = 3, \ ||\vec{v}|| = 5, \ ||\vec{u} + \vec{v}|| = 4.$$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

31 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace tels que

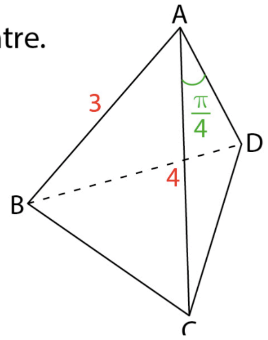
$$||\vec{u}|| = 1, \ ||\vec{v}|| = 2, \ ||\vec{v} - \vec{u}|| = \sqrt{5}.$$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

34 ABCD est le tétraèdre ci-contre.

a) On donne $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.
Déterminer la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{BAC}$.

b) On donne $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 8$.
Déterminer la longueur AD.
Arrondir au dixième.

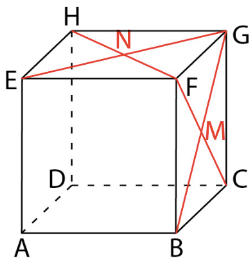


35 ABCDEFGH est un cube d'arête a, avec $a > 0$.
Les points M et N sont les centres des faces BCGF et EFGH.

a) Vérifier que $AM^2 = \frac{3}{2}a^2$.

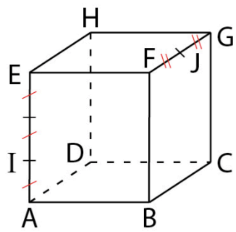
b) Exprimer AN^2 et MN^2 en fonction de a.

c) En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.



39 Ce cube a pour arête 2.
I est le point de l'arête [AE] tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et J est le milieu de l'arête [FG].
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ}$.

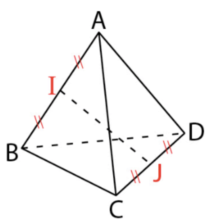
Conseil : écrire que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$.



41 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [DC].

a) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de a.

b) En déduire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AI}$.



42 Dans l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de même norme.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercices Type BAC

Exercice 1

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A$(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$ B$(1\ ;\ 0\ ;\ -3)$, C$(6\ ;\ 6\ ;\ 1)$ et E$(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$;
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
   c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
2. **a.** Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan ABC.
   b. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan ABC et passant par le point E.
   d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan ABC a pour coordonnées $\left(4\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à $16,5$ unités de volume.

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\ ;\ 1\ ;\ 3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.
   b. Montrer que le point B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.
2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.
   a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.
   b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\ ;\ \frac{19}{9}\ ;\ \frac{16}{9}\right)$.
   c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.
3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.
   On rappelle que le point B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
   a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.
   b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.
   c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

   Calculer l'aire du triangle ACH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

<u>Exercice 3</u>

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2 ; 0 ; 3),\ B(0 ; 2 ; 1),\ C(-1 ; -1 ; 2) \text{ et } D(3 ; -3 ; -1).$$

1. **Calcul d'un angle**

   a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Calculer les longueurs AB et AC.

   c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2. **Calcul d'une aire**

   a. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

   c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$

   d. Calculer l'aire du triangle ABC.

3. **Calcul d'un volume**

   a. Soit le point F(1 ; −1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

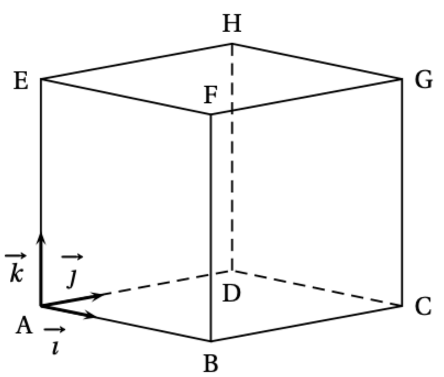
   b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

   c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

<u>Exercice 4</u>

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :

$$B(3 ; 0 ; 0),\ D(0 ; 3 ; 0) \text{ et } E(0 ; 0 ; 3).$$

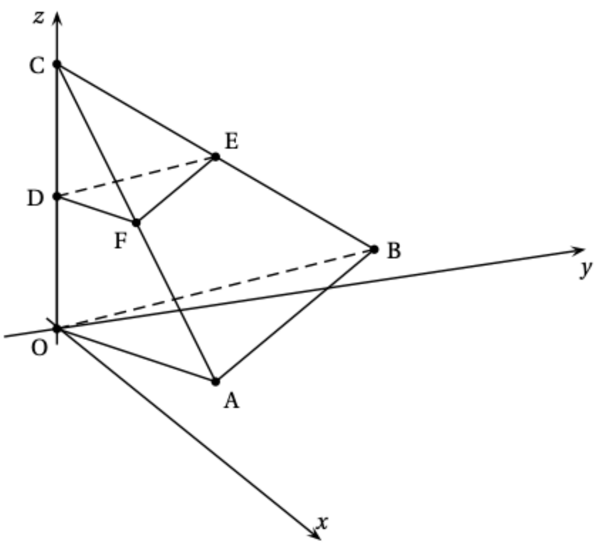


On considère les points P(0; 0; 1), Q(0; 2; 3) et R(1; 0; 3).

1. Placer les points P, Q et R sur la figure en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.
3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.
4. On s'intéresse à présent à la distance entre le point E et le plan (PQR).
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ est normal au plan (PQR).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).
   d. Montrer que le point $L\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).
   e. Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).
5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\frac{2}{3}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante}.$$
6. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle PQR.

Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points A(10; 0; 1), B(1; 7; 1) et C(0; 0; 5).



1. **a.** Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.
   b. Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième.
2. Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA).
4. Soit D le milieu du segment [OC]. Déterminer une équation du plan P parallèle au plan (OAB) passant par D.
5. Le plan P coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F.
   Déterminer les coordonnées du point F. On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{7}{2}\ ;\ 3\right)$.
6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

Exercice 6

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée en annexe.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant pat I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

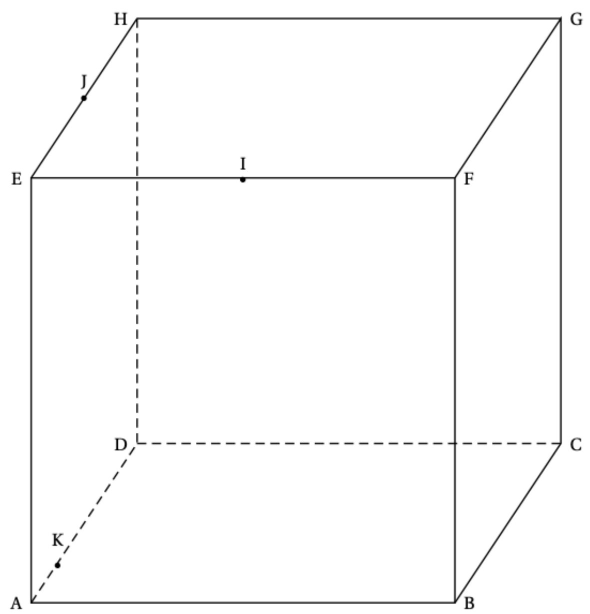
Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie.

1. Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.
2. Construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x+4y-3z-1=0$.
   c. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).
2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   c. Tracer les droite Δ sur la figure donnée en annexe.
   d. Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.



Exercice 7

Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie** :

- ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 12, AD = 18 et AE = 6
- EBDG est un tétraèdre.

.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives B(12 ; 0 ; 0), D(0 ; 18 ; 0) et E(0 ; 0 ; 6).

1. Démontrer que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x+2y+6z-36=0$.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

b. En déduire que la droite (AG) coupe le plan (EBD) en un point K de coordonnées $(4;6;2)$.

3. La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ? Justifier.

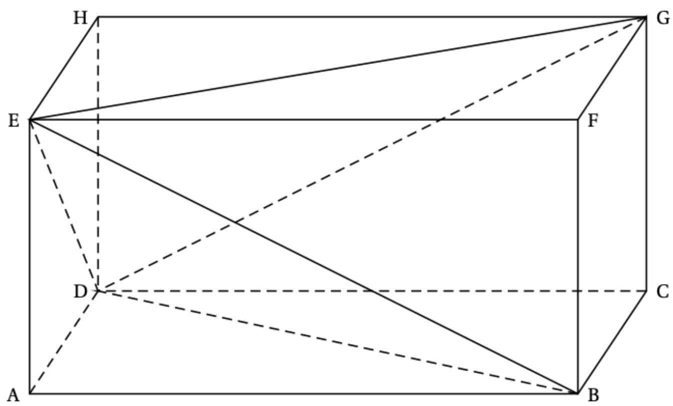
4. **a.** Soit M le milieu du segment [ED]. Démontrer que les points B, K et M sont alignés.

b. Construire alors le point K sur la figure donnée en annexe 2 à rendre avec la copie.

5. On note P le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K.

a. Démontrer que le plan P coupe le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED).

b. Construire alors sur l'**annexe 2** à rendre avec la copie l'intersection du plan P et de la face EBD du tétraèdre EBDG.



Exercice 8

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 4), (4 ; −1 ; 0), (0 ; 3 ; 2) et (4 ; 3 ; −2).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3 ; 3 ; −1). Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

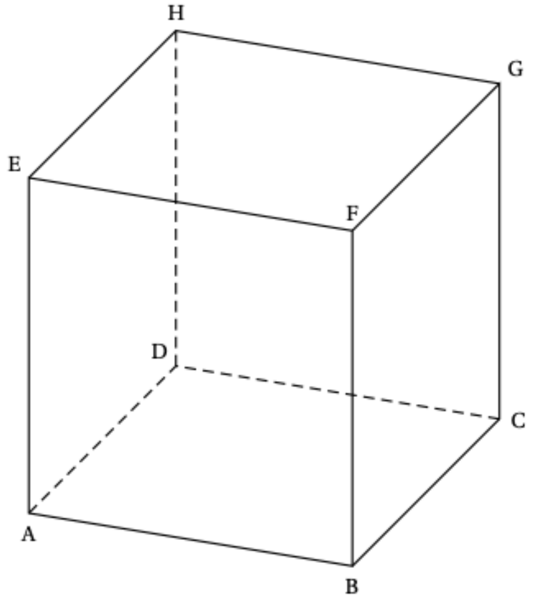
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 9

Soit ABCDEFGH un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Pour tout réel t, on considère le point M de coordonnées $(1-t\,;\ t\,;\ t)$.

1. Montrer que pour tout réel t, le point M appartient à la droite (BH).

On admet que les droites(BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 \\ y &=& t' \\ z &=& 1-t' \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.
3. Pour tout réel t', on considère le point $M'(1; t'; 1-t')$.
   - **a.** Montrer que pour tous réels t et t', $MM'^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.
   - **b.** Pour quelles valeurs de t et de t' la distance MM' est-elle minimale ? Justifier.
   - **c.** On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\ \frac{1}{3}\,;\ \frac{1}{3}\right)$et Q celui de coordonnées $\left(1\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right)$.
     Justifier que la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

Exercice 10

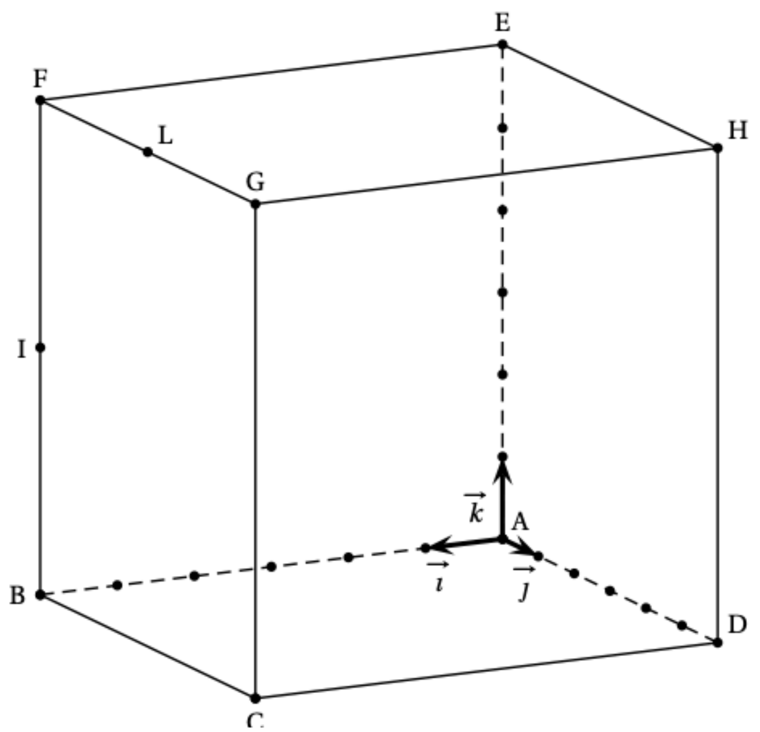
Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie**, on considère le cube ABCDEFGH de côté 6 cm dans le repère orthonormé $\left(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, l'unité étant le cm.
On admet que le point I a pour coordonnées $(6\,;0\,;3)$ dans ce repère.
On appelle L le milieu du segment [FG].
On appelle P le plan défini par les trois points E, I et L.
On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

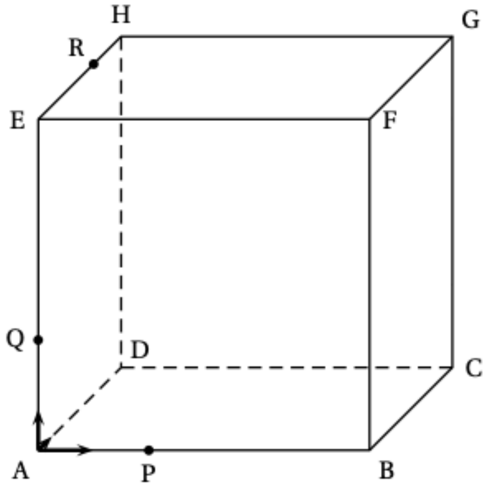
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Justifier que le volume du tétraèdre FELI est 9 cm^3.

3. **a.** Soit Δ la perpendiculaire au plan P passant par le point F. Justifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+6 \\ y & = & -2t \\ z & = & 2t+6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   b. Montrer que l'intersection de la droite Δ et du plan P est le point $K\left(\frac{16}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{14}{3}\right)$.
4. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ELI.
5. Tracer sur le graphique fourni en **annexe 2 à rendre avec la copie**, la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par le point G et en donner la nature précise sans justification.



Exercice 5



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,, \vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\,;\,0\,;\,0), F(6\,;\,0\,;\,6) \text{ et } R(0\,;\,4\,;\,6).$$

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR).

c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

c. Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points J(6; 4; 0) et K(6; 6; 2).

a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

c. Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).
On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.