Chap 1P – Probabilités – loi Binomiale – Cours

I. Probabilités conditionnelles (Rappels 1ère)

On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des résultats muni d'une loi de probabilité p. A et B sont des événements de E, avec A de probabilité non nulle.

1) Définition

La probabilité de B sachant A réalisé, est le nombre réel, noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

2) Formule des probabilités totales

Par suite $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$. A et $\overline{A}$ constituent une partition de Ω. Cette situation se généralise à une partition quelconque de E.

Formule des probabilités totales

Soit A_1, A_2,...,A_n des événements de probabilités non nulles constituant une partition de l'univers Ω (c'est-à-dire tous deux à deux disjoints et de réunion Ω). Pour tout événement B de E on a : $p(B) = p(A_1 \cap B) + ... + p(A_n \cap B)$

II. Variable aléatoire et loi de probabilité (Rappels : 1ère)

1) Introduction

On lance trois pièces de monnaie équilibrées. On gagne 1€ chaque fois que F apparaît et on perd 1€chaque fois que P apparaît. On note X la fonction qui, à chaque issue, associe le gain algébrique (positif ou négatif) correspondant. X est appelée variable aléatoire sur Ω. Les valeurs prises par la variable X sont : $\{-3; -1; 1; 3\}$. Chacune de ces valeurs définissent un événement dont on peut calculer la probabilité. On montre que :

- L'événement X $=-3$ est {PPP}. Sa probabilité est $P(X=-3)=\frac{1}{8}$.
- L'événement X $=-1$ est {PPF ; PFP ; FPP}. Sa probabilité est $P(X=-2)=\frac{3}{8}$.
- L'événement X $=1$ est {FFP ; FPF ; PFF}. Sa probabilité est $P(X=1)=\frac{3}{8}$.
- L'événement X $=3$ est {FFF}. Sa probabilité est $P(X=3)=\frac{1}{8}$.

On résume ces résultats dans un tableau pour donner la loi de probabilité de X :

gain x_i	-3	-1	1	3
$p(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

2) Définition

Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire X toute fonction définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui, à chaque x_i, associe la probabilité de l'événement $P(X=x_i)=p_i$. On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

3) Paramètres d'une variable aléatoire

Définitions. Avec les notations précédentes, on appelle :

- **Espérance mathématique** de X : $\boxed{E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \ldots + x_n \times p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i}$
- **Variance de** X :

$$\boxed{V(X) = p_1\left(x_1 - E(x)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(x)\right)^2 + \ldots + p_n\left(x_n - E(x)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(x)\right)^2}$$

- **Écart type de** X : $\boxed{\sigma = \sqrt{V}}$

Exemple : On reprend l'exemple de l'introduction.

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 0$$

$$V(X) = \frac{1}{8}(-3)^2 + \frac{3}{8}(-1)^2 + \frac{3}{8}(1)^2 + \frac{1}{8}(3)^2 = \frac{24}{8} = 3 \qquad \boxed{\sigma = \sqrt{3}}$$

Remarques :

Si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur. Si $E(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur. Si $E(X) = 0$, le jeu est équitable. De plus, lors de la répétition, un grand nombre de fois, de l'expérience dans les mêmes conditions, la moyenne des valeurs obtenues par X se rapproche de l'espérance mathématique de X.

III) Loi binomiale

1) Épreuve et schéma de Bernoulli

Définition. Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues (succès ou échec, pile ou face ...). Un **schéma de Bernoulli** est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

2) Définition.

On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On note p la probabilité de succès à chaque épreuve de Bernoulli. On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves. La loi de probabilité de X est appelée la loi binomiale de paramètres n et p, souvent notée $B(n, p)$. On représente un schéma de Bernoulli de paramètres n, p par un arbre. Pour tout entier naturel k tel que le nombre de chemins menant à k succès sur les n tentatives est le nombre $\binom{n}{k}$ qui se lit « k parmi n ». $\binom{n}{k}$ est appelé coefficient binomial (voir cours dénombrement) . On apprendra que $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ Avec $\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots . \times 1}$ appelé factoriel n.

3) Théorème

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors, pour tout entier naturel k tel que $k \in |[0; n]|$, on a :

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}}$$

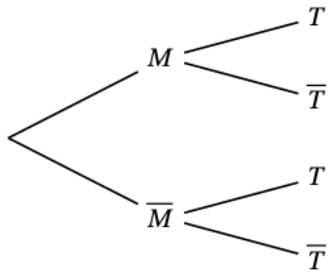
Chap 1P – Probabilités – Rappel et loi Binomiale - Exos

Exercice 1

On étudie un test de dépistage pour une certaine maladie dans une population donnée. On sait que 1 % de la population est atteint de la maladie. Des études ont montré que si une personne est malade, alors le test se révèle positif dans 97 % des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.
Pour une personne à qui on fait passer le test de dépistage on associe les évènements :

- M : la personne est malade,
- T : le test est positif.

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'exercice.



2. Justifier que $P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}0198$.
3. Montrer que $P(T) = 0{,}0295$.
4. Calculer $P_T(M)$.
5. Une personne dont le test se révèle positif est-elle nécessairement atteinte par cette maladie ?

Exercice 2

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres au départ de Nantes. Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ».
Une étude a produit les données suivantes :

- 40 % des clients optent pour l'avion ;
- parmi les clients ayant choisi le train, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.
On considère les évènements suivants :

— A : « le client a choisi l'avion » ;
— V : « le client a choisi l'option « visites guidées » ».

1. Déterminer $P_A(V)$.
2. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à $0,42$.
3. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.
4. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante.
   Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option « visites guidées » ?

Exercice 3

On dispose d'un paquet de cartes contenant un nombre identique de cartes de la catégorie « Sciences » et de la catégorie « Économie ». Une question liée à un de ces deux thèmes figure sur chaque carte.
Les cartes sont mélangées et on en tire une au hasard dans le paquet. Ensuite, on essaye de répondre à la question posée.
Un groupe de copains participe à ce jeu. Connaissant leurs points forts et leurs faiblesses, on estime qu'il a :

- 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;
- 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en économie.

On note S l'évènement « La question est dans la catégorie Sciences » et B l'évènement « La réponse donnée par le groupe est bonne ».

Partie A :

1. Calculer $P(B \cap S)$.
2. Déterminer la probabilité que le groupe de copains réponde correctement à la question posée.
3. Les évènements S et B sont-ils indépendants ?

Partie B :

Pour participer à ce jeu, on doit payer 5 € de droit d'inscription. On recevra :

- 10 € si on est interrogé en sciences et que la réponse est correcte ;
- 30 € si on est interrogé en économie et que la réponse est correcte ;
- rien si la réponse donnée est fausse.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée, associe son gain. On appelle gain la différence en euros entre ce qui est reçu et les 5 € de droit d'inscription.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Que retourne la fonction Jeu écrite ci-dessous en langage Python avec les listes :
   L =[-5 ; 5 ; 25] et G = [0,5625 ; 0,375 ; 0,062 5] ?

```
def Jeu(L,G):
  n = len(L)
  E = 0
  for i in range(n):
    E =E + L[i]*G[i]
  return(E)
```

Exercice 4

Un magasin de téléphonie mobile lance une offre sur ses smartphones de la marque Pomme vendus à 800 € : il propose une assurance complémentaire pour 50 € ainsi qu'une coque à 20 €.
Ce magasin a fait les constatations suivantes concernant les acheteurs de ce smartphone :

- 40 % des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire.

On interroge au hasard un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.
On considère les évènements suivants :

- A : « le client a souscrit à l'assurance complémentaire » ;
- C : « le client a acheté la coque ».

1. Calculer la probabilité que le client ait souscrit à l'assurance complémentaire et ait acheté la coque.
2. Montrer que $P(C) = 0,28$.
3. Le client interrogé a acheté la coque.
   Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas souscrit à l'assurance complémentaire ?
4. Déterminer la dépense moyenne d'un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.
   On pourra noter X la variable aléatoire qui représente la dépense en euros d'un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.

Activité – Vers la loi Binomiale Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec un retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est 0,25. Un client appelle le service à 3 reprises. On désigne par X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

1) Réaliser un arbre de probabilités.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer $E(X)$
4) Calculer $P(X \geq 1)$. Interpréter.

Exercice 5

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X. Justifier.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux personnes contaminées parmi les 10.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 6

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis.
On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.
On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
– F l'événement « le membre choisi est une femme »,
– T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.

2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 7

L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. **a.** Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{3}{8}$.

c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\dfrac{1}{10}$?

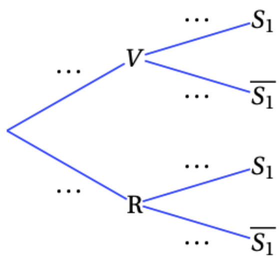
Exercice 8

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.
On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

- V l'évènement : « le dé tiré est vert »
- R l'évènement : « le dé tiré est rouge »
- S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer la probabilité $P(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

a. Démontrer que :

$$P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.
Démontrer que :

$$p_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geqslant 0,999$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Exercice 9

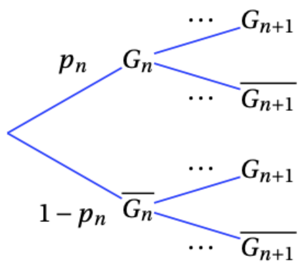
Un site internet propose des jeux en ligne.
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

- **a.** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
- **b.** Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
- **c.** Déterminer la limite de p_n.

Exercice 10

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
   $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?